Capítulo 17

sábado, 20 de abril de 2019 2:15

Calcular P.P. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinx}{x(x^2+1)} dx$

Partimos de:

$$\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz = \oint \frac{Ae^{iz}}{z} dz + \oint \frac{Be^{iz}}{(z^2+1)} dz$$

$$A(z^2+1) + Bz = 1 \Rightarrow para\ A = 1, B = -z$$

$$\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz = \oint \frac{e^{iz}}{z} dz - \oint \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)} dz \quad (1)$$

Las dos integrales del lado derecho ya han sido realizadas por Javier en los capítulos 17 y 16 respectivamente con la diferencia que la función es ze^{iz} en vez de e^{iza}, pero al ser también holomorfa sólo afecta al resultado multiplicandolo por i ($z_0 = \pm i$):

$$\oint_{c1+c2} \frac{e^{iza}}{(z^2+1)} dz = \pi e^{-|a|} \ (\text{capítulo } 16)$$

$$\oint_{c1+c2} \frac{ze^{iza}}{(z^2+1)} dz = i\pi e^{-|a|} \quad (2)$$

Y al usar la fórmula de Euler $e^{iz} = cosz + isinz$, se va ir al integrar la parte del coseno en las tres integrales (de la fórmula 1) al ser función impar tanto $\frac{cosz}{z(z^2+1)}, \frac{cosz}{z}$ como $\frac{zcosz}{z^2+1}$, si además dividimos todo por "i" nos queda:

$$\oint \frac{sinz}{z(z^2+1)} dz = \oint \frac{sinz}{z} dz - \oint \frac{zsinz}{(z^2+1)} dz \quad (3)$$

Sustituyendo la z por x, los límites de integración por estar en el eje real en el supuesto de R=∞ y teniendo en cuenta que $a = 1$, por fin nos queda:

$$P.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinx}{x(x^2+1)} dx = P.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinx}{x} dx - P.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xsinx}{(x^2+1)} dx = \pi - \pi e^{-1} = \pi(1 - e^{-1}) \approx 1{,}98587$$

Nota: recordar que hemos dividido por "i" la fórmula número 2 para obtener la 3.